TEMA2. Dinámica I
Capitulo 3. Dinámica del sólido rígido

TEMA 2: Dinámica I

- Capítulo 3: Dinámica del sólido rígido

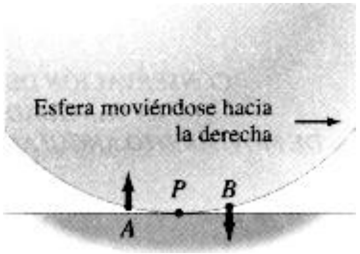
- Eje instantáneo de rotación
- Sólido con eje fijo
- Momento de inercia.
- Teorema de Steiner.
- Conservación del momento cinético axial.
- Energía cinética.
- Teorema del momento cinético de un punto y de un sistema de partículas. Conservación

Sólido Rígido

- Sólido rígido
  - Sistema indeformable
  - Distancia entre partículas constante
  - Fuerzas internas de cohesión mayores que fuerzas externas
  - Se mueven todas las partículas conjuntamente

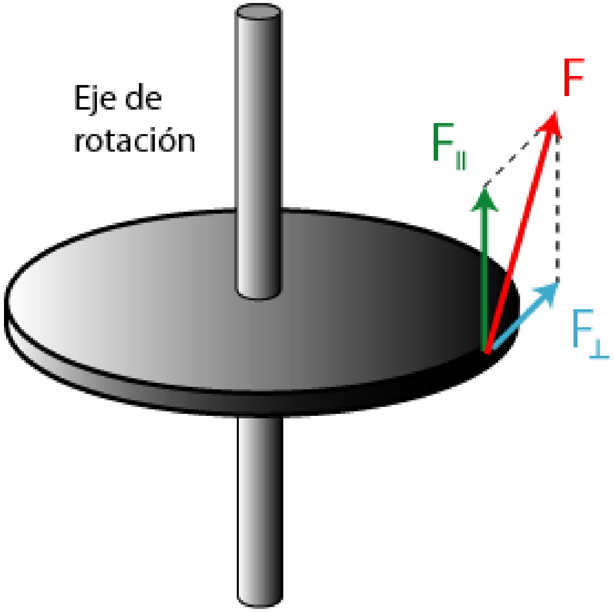
- Movimiento

  Siempre puede descomponerse en:
  - Translación (vectores velocidad paralelos)
  - Rotación (vectores velocidad describen arcos de circunferencia respecto recta imaginaria:
    - *eje instantáneo de rotación*



Sólido con un eje fijo

- Vamos a suponer un sólido ligado a un eje fijo
  - Sólo puede girar
  - No hay translación
  - Las fuerzas aplicadas producirán giro cuando tengan componente perpendicular al eje.



Energía cinética de rotación

- Cuando la fuerza aplicada produce un movimiento de rotación, la energía de un punto de material en giro:

$$E_{c,i} = E_{Rot,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \left(r_i \omega_i \right)^2$$

La energía cinética total será la suma para todas las partículas

$$E_{Rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(r_i \cdot \omega_i \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^{\ 2} \right) \cdot \omega^2$$

Siendo el paréntesis el ***momento de inercia***, ***I***

$$\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2}$$

Momento de Inercia

- La energía cinética de rotación es proporcional a la velocidad angular al cuadrado
  - La constante de proporcionalidad es una cantidad característica del cuerpo que gira: **momento de inercia** y es una medida de la resistencia de un objeto a experimentar cambios en su movimiento de rotación respecto a su eje.

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Sistema discreto de partículas

$$I = \int r^2 dm$$

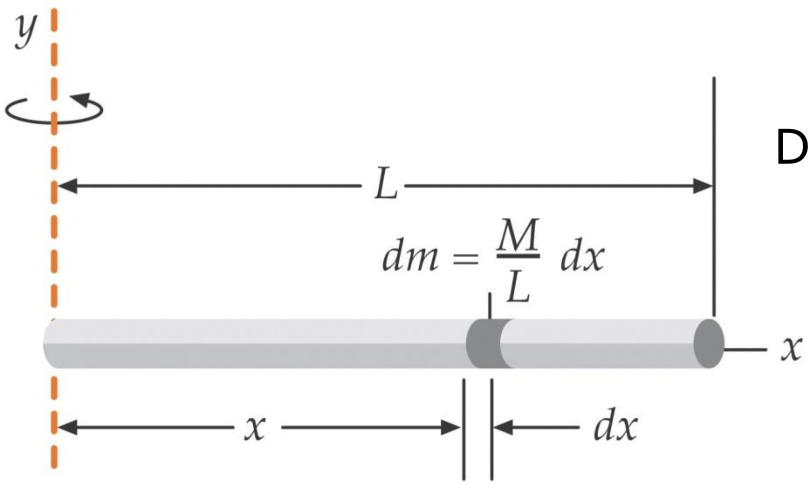
Objeto continuo

- Depende de
  - ✓ La masa
  - ✓ Su ***distribución geométrica*** respecto al eje de giro

- Unidades: $kg \cdot m^2$

Momentos de Inercia

- Ejemplo. **Barra uniforme**



$$I = \int_0^L x^2 dm$$

Densidad de masa lineal (λ):

$$M = \lambda L \quad \Rightarrow \quad dm = \lambda dx \quad \Rightarrow$$

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

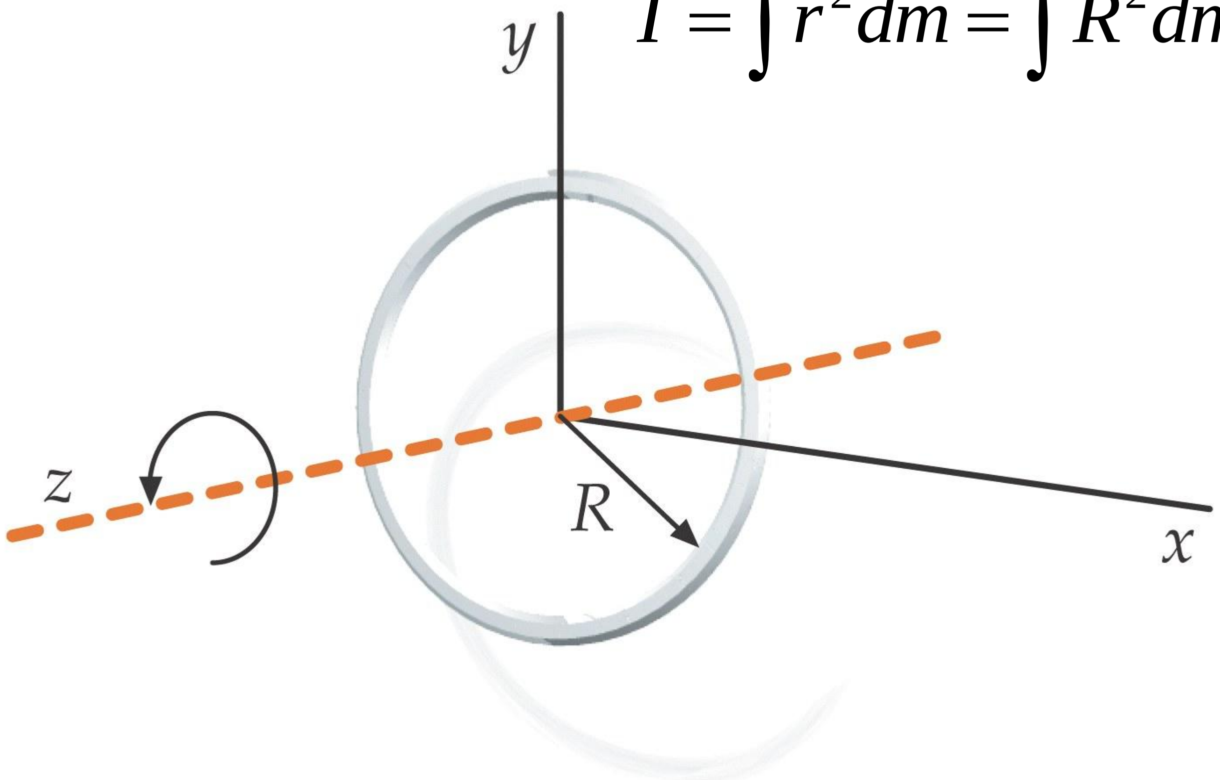
$$I = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \frac{1}{3}\lambda L^3 = \boxed{\frac{1}{3} M L^2}$$

El momento de inercia alrededor del eje *z* es también 1/3 ML^2, y el correspondiente al eje *x* es cero si supongamos que toda la masa está sobre el eje *x*.

Momentos de Inercia

➢Ejemplo. **Anillo respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro**

$$I = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = \boxed{MR^2}$$



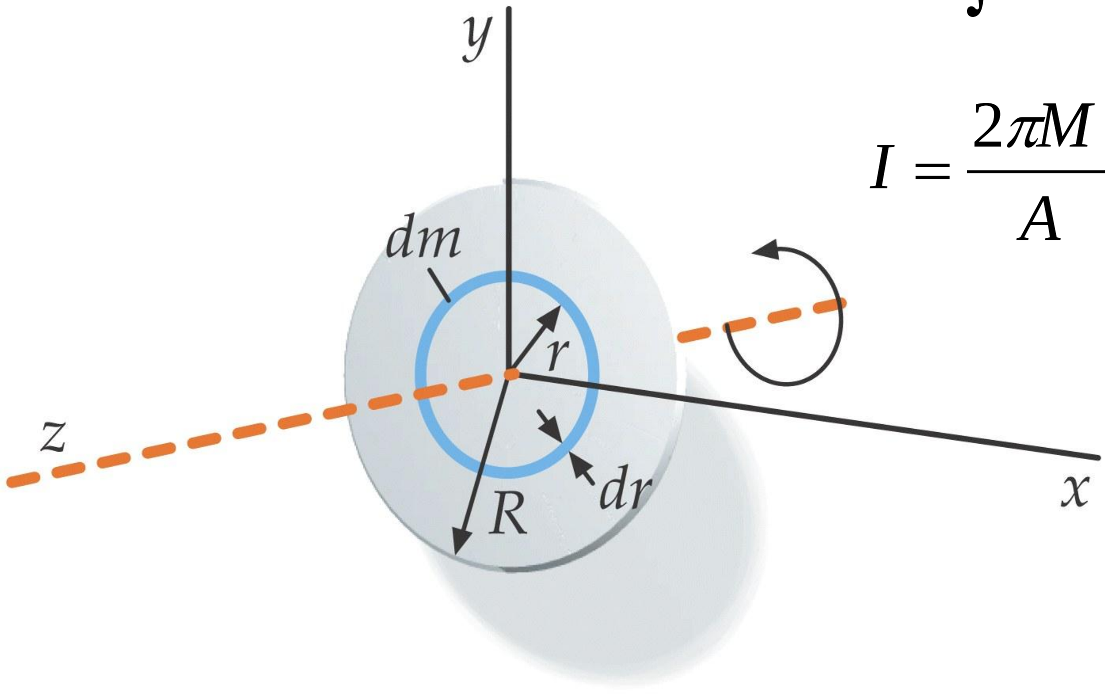
Momentos de Inercia

- Ejemplo. **Disco uniforme respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro**

$$dm = \sigma dA = \frac{M}{A} 2\pi r dr$$

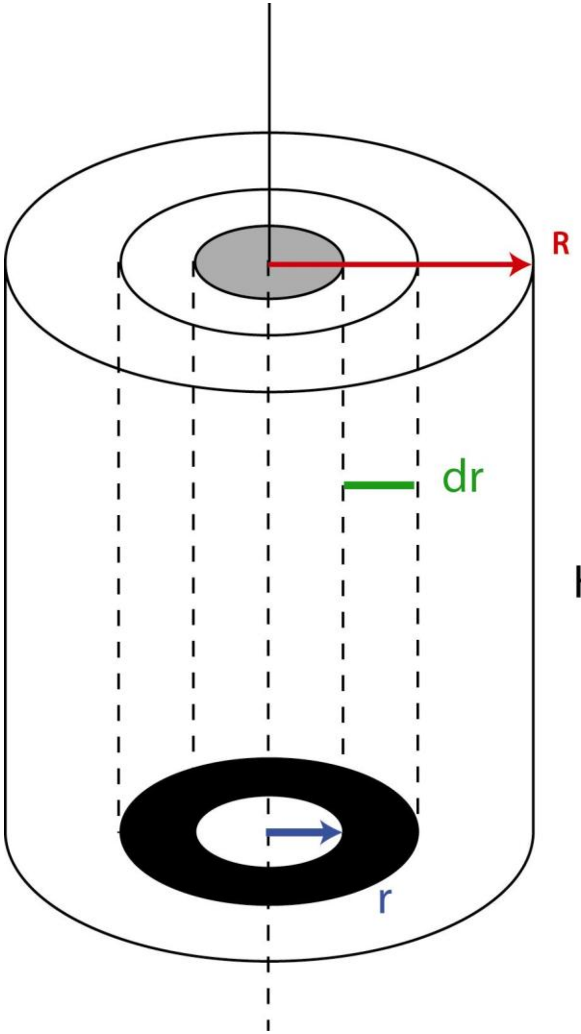
$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{2\pi M}{A} \frac{R^4}{4} = \frac{\pi M}{2\pi R^2} R^4 = \boxed{\frac{1}{2} M R^2}$$



Momentos de Inercia

- Ejemplo. **Cilindro macizo**



$$dm = \rho dV = \frac{M}{V}\left(2\pi r h\right)\cdot dr$$

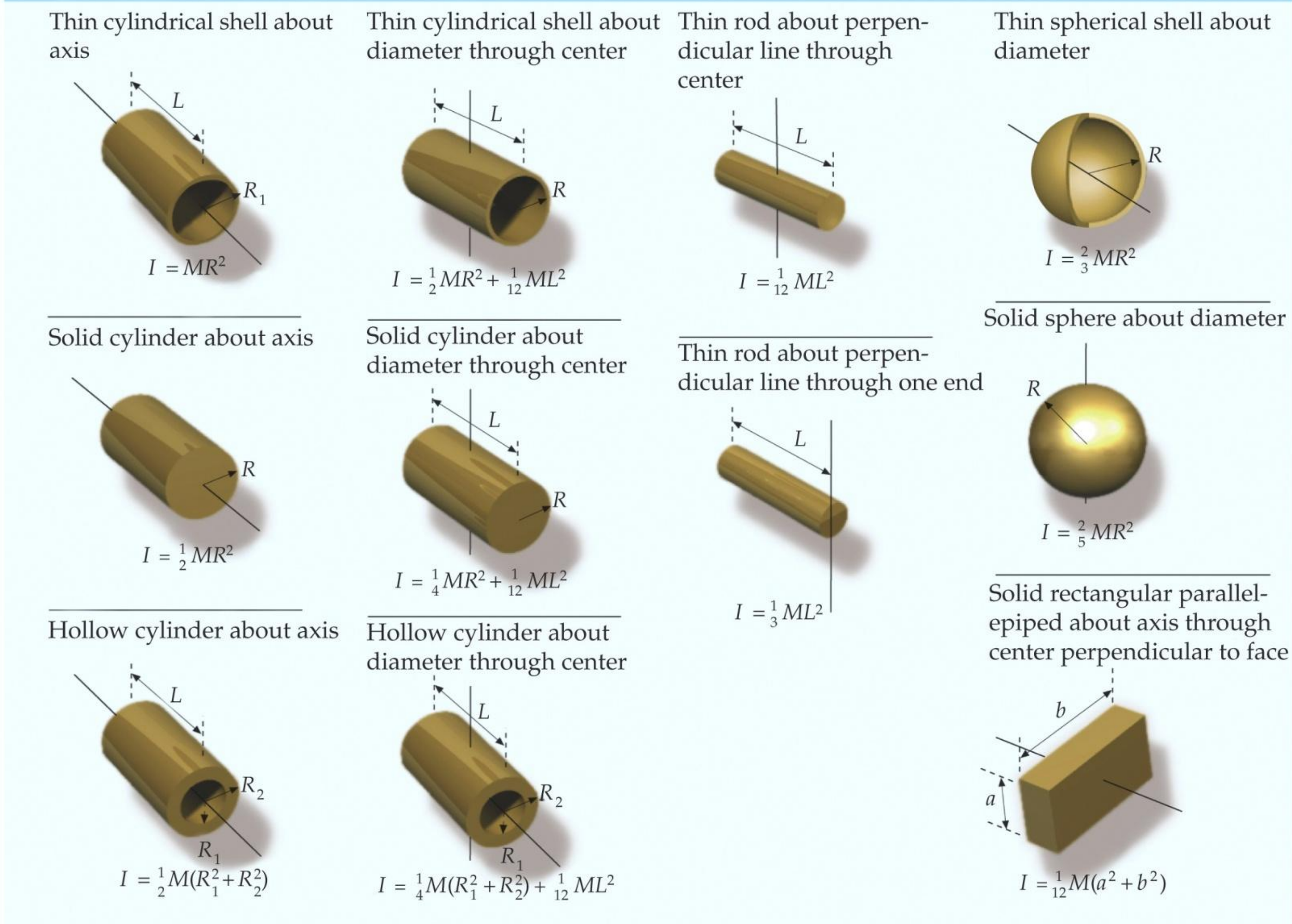
$$I = \int_0^R r^2 \rho \cdot 2\pi r h \cdot dr = \frac{1}{2}\pi R^4 h \rho$$

$$m = \pi R^2 h \cdot \rho \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} m R^2$$

Momentos de inercia más importantes

Table 9-1

Moments of Inertia of Uniform Bodies of Various Shapes

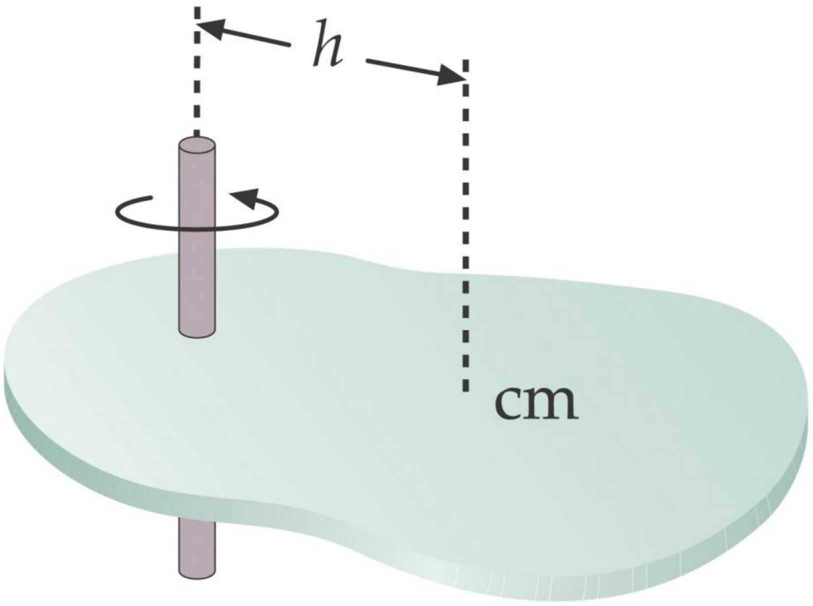


A disk is a cylinder whose length L is negligible. By setting $L = 0$, the above formulas for cylinders hold for disks.

Teorema de Steiner

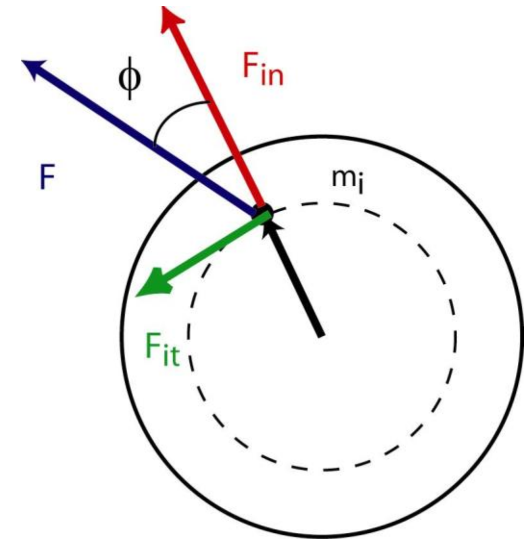
- Si se conoce ***I*** respecto a un eje que pasa por el centro de masas, se puede conocer respecto a otro eje paralelo a éste

$$\boxed{I_h = I_{CM} + M \cdot h^2}$$



Momento de fuerza

- Aplicamos una fuerza sobre un cuerpo que puede girar respecto a un eje
  - Situamos en él el sistema de coordenadas, ***r***
  - Si la línea de acción no pasa por el eje ***F*** || ***r***



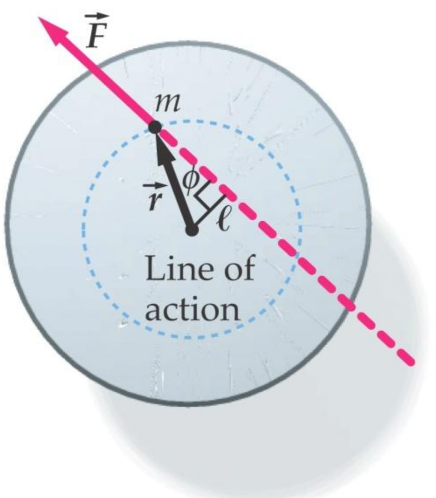
- Aparece un **momento de fuerza**

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}}$$

...que hace girar el cuerpo

$$\tau = F_t r = F \cdot r \cdot sen\phi = F \cdot \ell$$

Brazo de palanca



Segunda Ley de Newton para la rotación

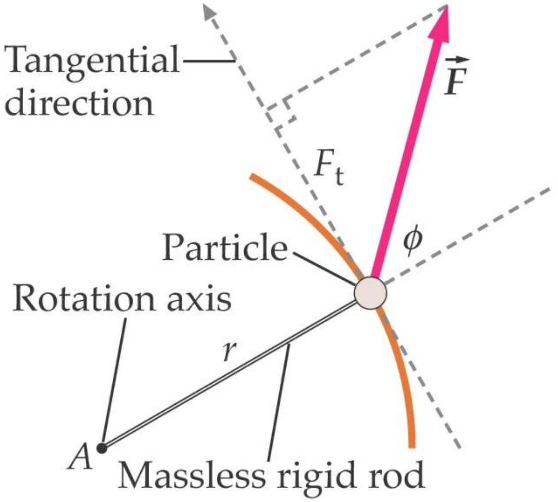
- Al aplicar una fuerza *no colineal* con r, la componente tangente al arco producirá una aceleración tangencial ("1ª Ley de Newton")

$$\overrightarrow{F_{i,T}} = m_i \cdot \overrightarrow{a_{i,T}} = m_i \cdot r_i \cdot \alpha \cdot \overrightarrow{u_T}$$

Multiplicando vectorialmente por $\boldsymbol{r_i}$ ➡ $\tau_i = m_i r_i^2 \cdot \alpha$

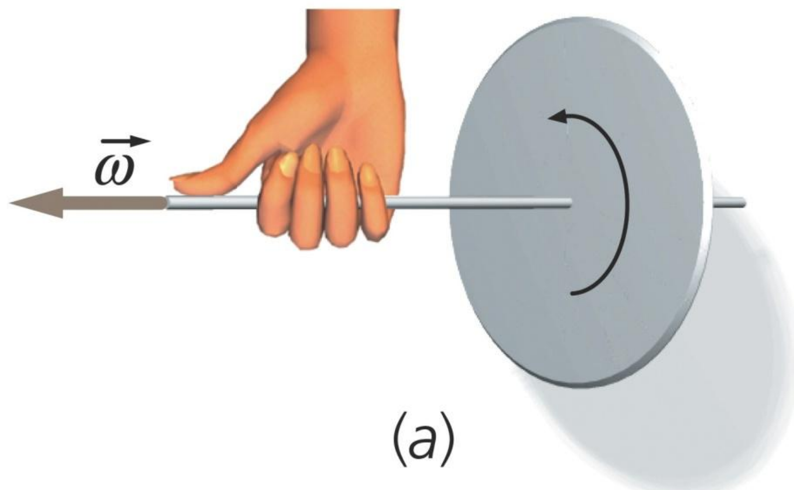
Y sumando para todas las partículas del sólido

$$\boxed{\sum \tau_i = \sum m_i r_i^2 \cdot \alpha = I \cdot \alpha}$$



Naturaleza vectorial de la rotación

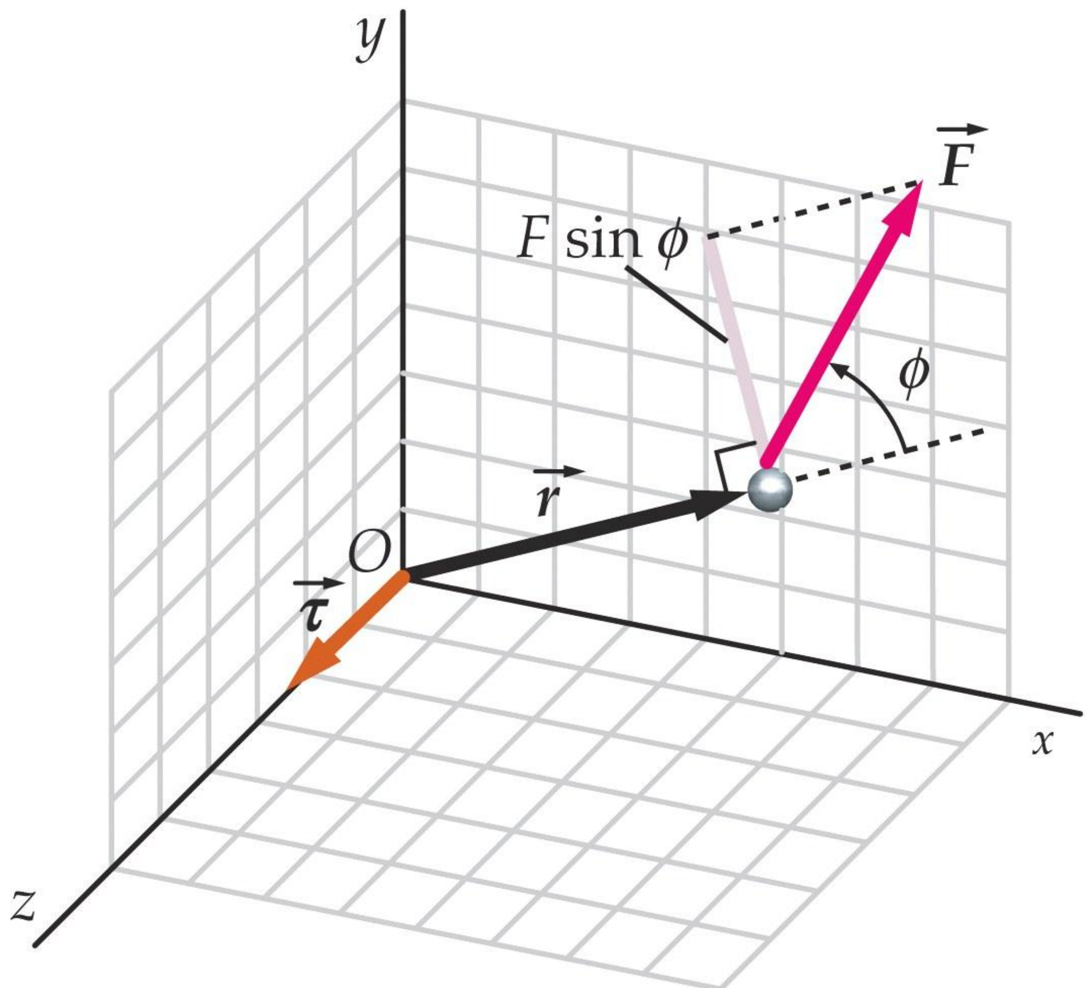
- La dirección de la velocidad angular ω se determina por convención con la **regla de la mano derecha**.



(a)

(b)

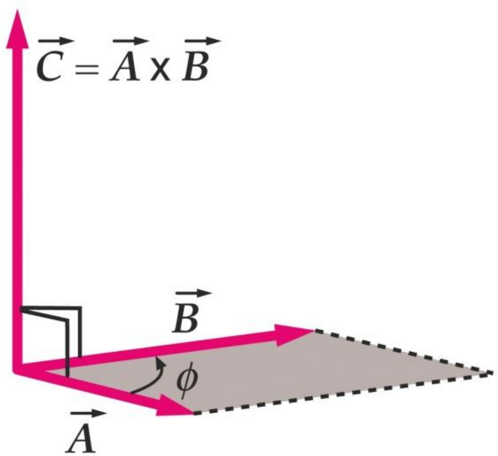
Producto vectorial

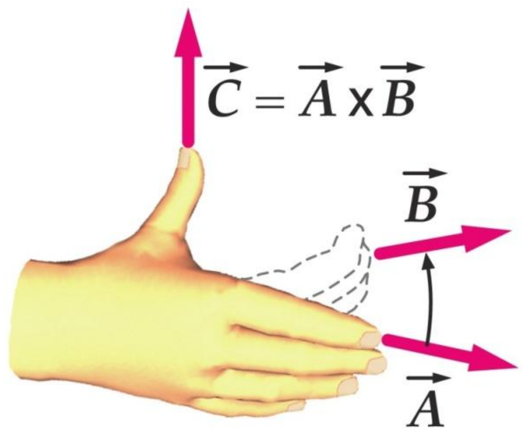


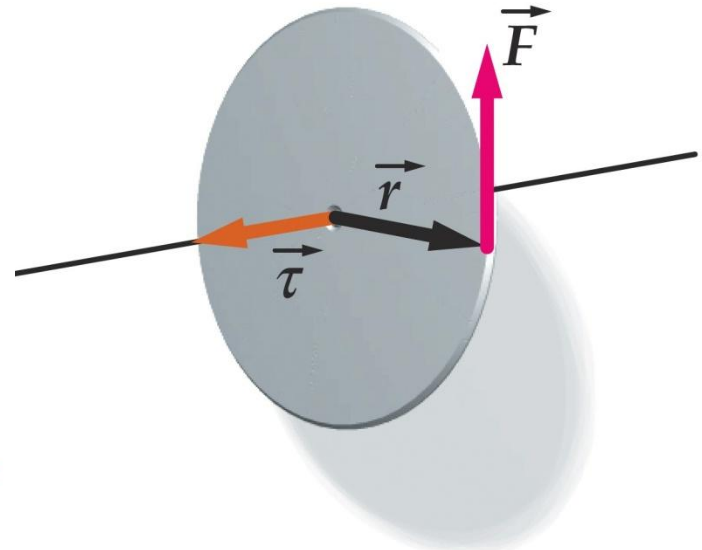
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Propiedades del producto vectorial

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \cdot sen\phi\, \mathbf{n}$$





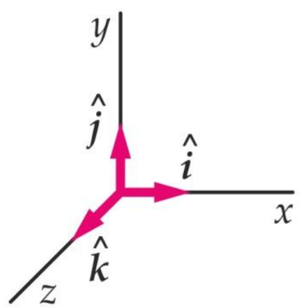


$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$



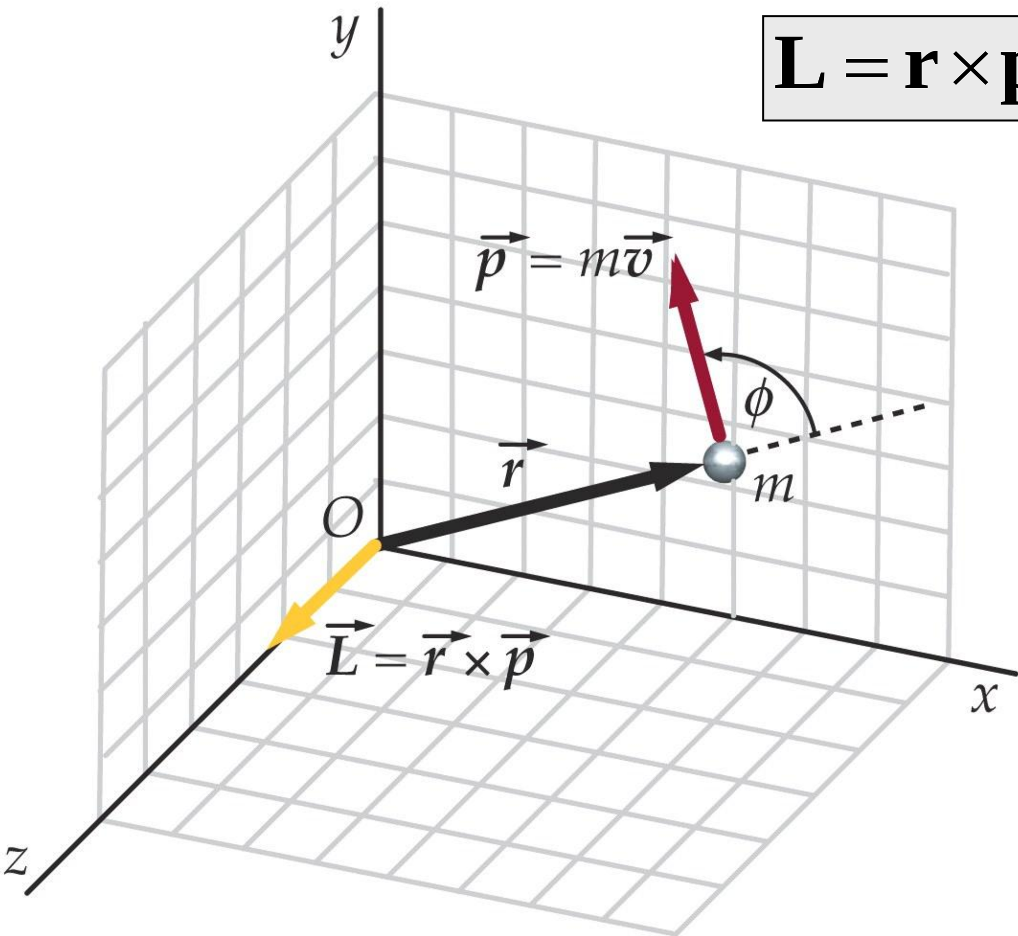
$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$$

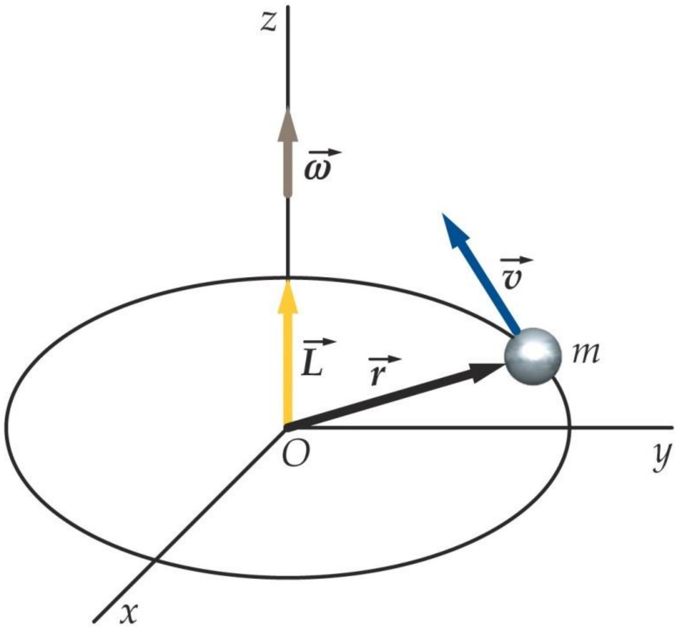
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}\right)$$

Momento angular de una partícula



$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}}$$

- Momento angular de un sistema que gira alrededor de un eje de simetría.

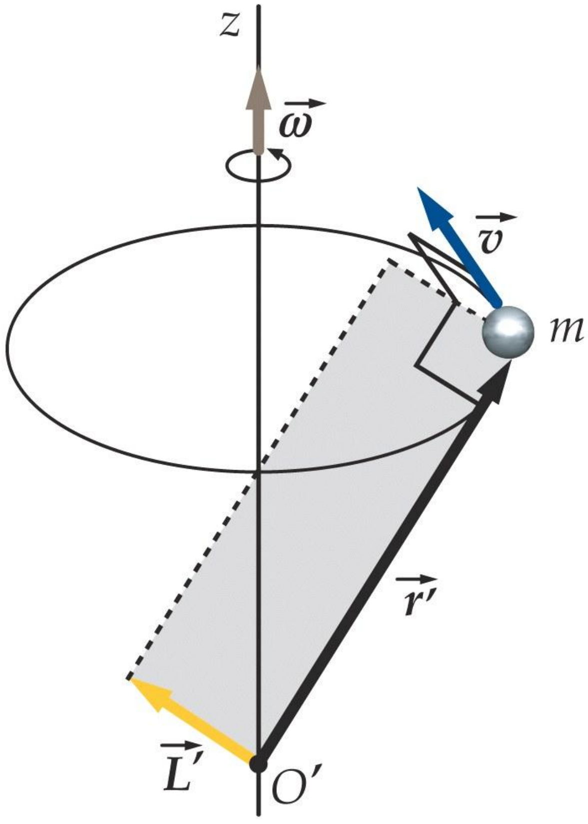


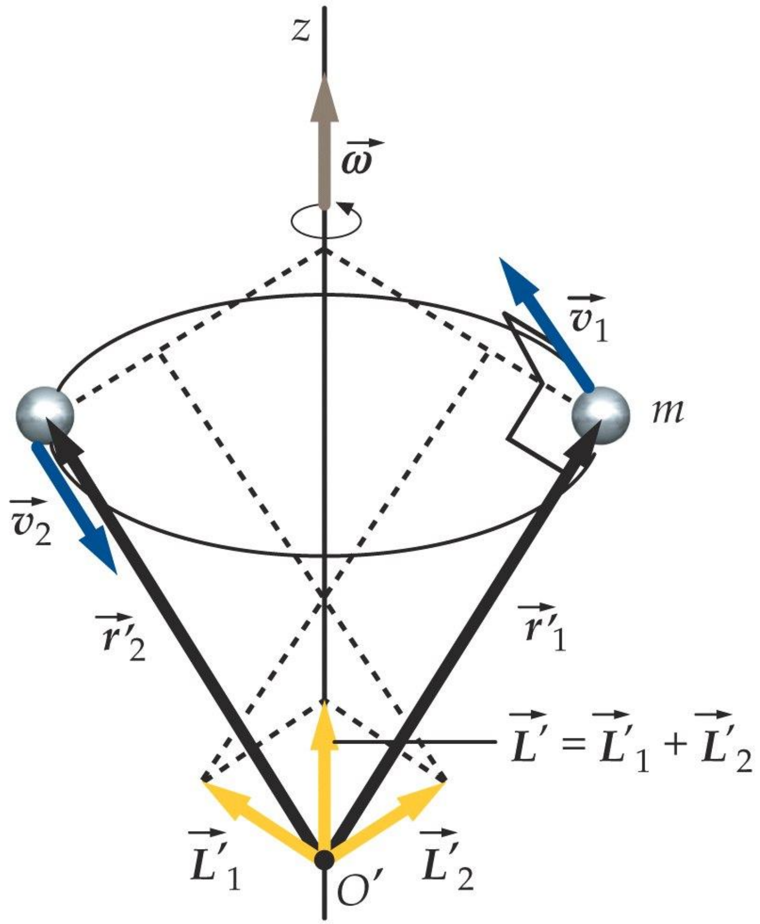
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = rmv \cdot sen\, 90\, \mathbf{k} =$$

$$= rmv\,\mathbf{k} = mr^2 \omega\, \mathbf{k} = mr^2 \boldsymbol{\omega} = \boxed{I\boldsymbol{\omega}}$$

Momento angular de una partícula

- Para cualquier sistema de partículas que gira alrededor de un eje de simetría, el **momento angular total** es paralelo a la velocidad angular.





Resultados adicionales que se refieren al momento (τ) y al momento angular (L)

- El momento externo neto que actúa sobre un sistema es igual a la tasa de cambio del momento angular del sistema:

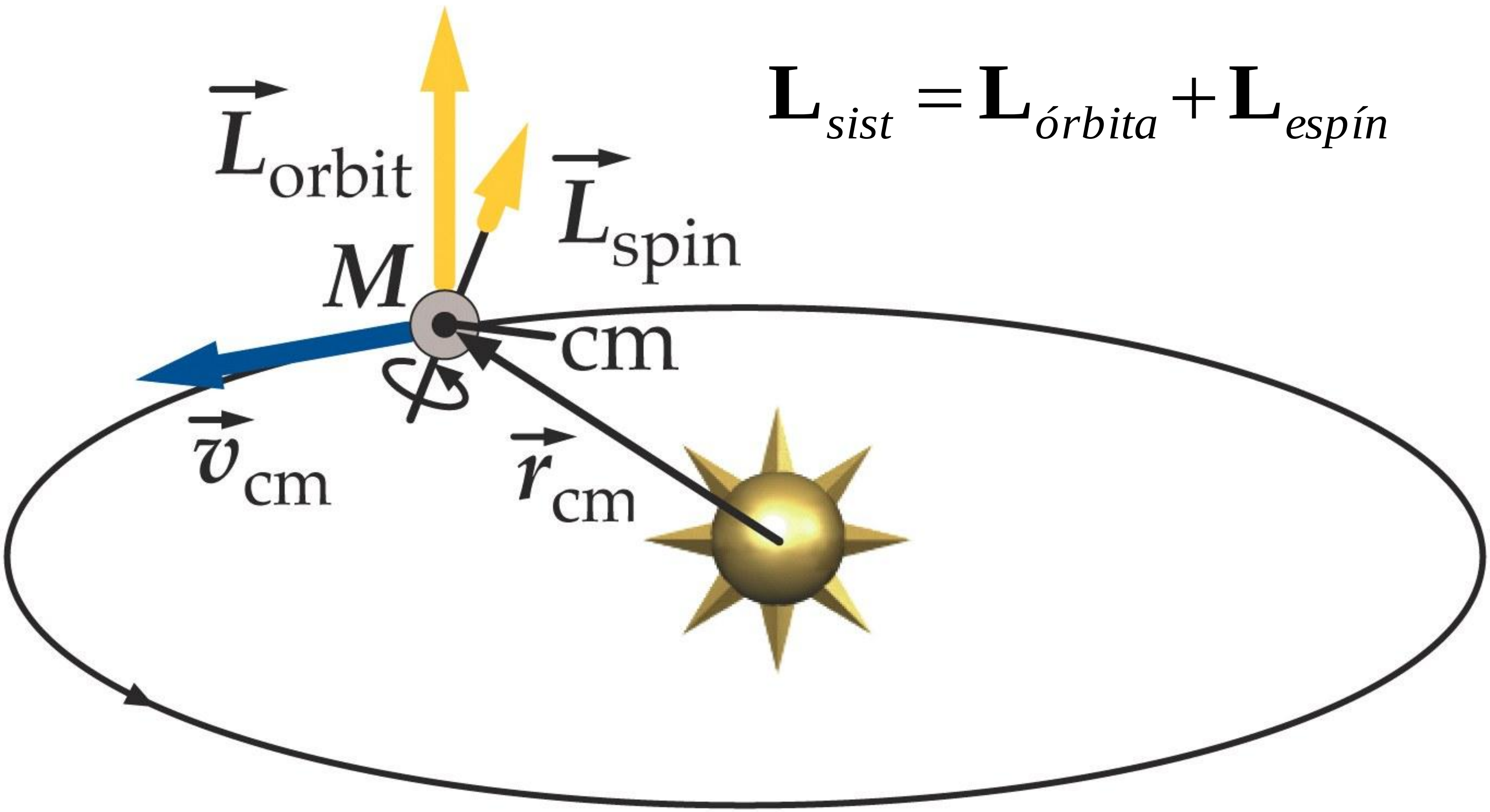
$$\tau_{neto} = \frac{d\mathbf{L}_{sist}}{dt}$$

- Si se integran los dos términos de esta ecuación con respecto al tiempo se obtiene:

$$\Delta\mathbf{L}_{sist} = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\tau}_{neto}\,dt$$

Momento angular de la Tierra

$$\mathbf{L}_{sist} = \mathbf{L}_{órbita} + \mathbf{L}_{espín}$$



Teoremas del momento cinético para un sistema

- Momento cinético de un sistema

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Derivando respecto al tiempo

$$\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{p} + \sum \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{p}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{\tau}_i$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}}$$

Teorema del Momento cinético

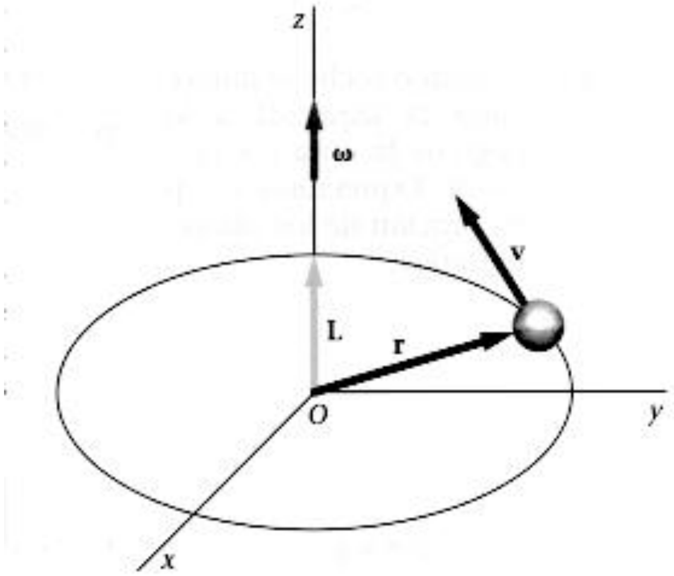
$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{\tau} \parallel \vec{L}$$

- Para sólido con eje fijo

$$\boxed{\tau_z = \frac{dL_z}{dt}}$$



Conservación del momento cinético

- Si el momento total respecto al eje de giro es nulo el momento cinético respecto a dicho eje se mantiene constante

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = cte}$$

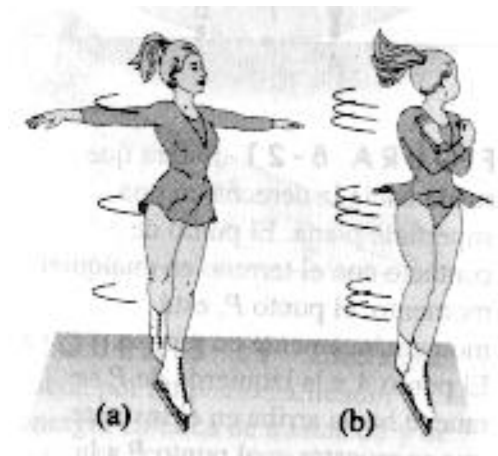
$$\frac{1}{2} mR^2$$

$$\boxed{\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}}$$

1. Momento de inercia constante

$$I = cte \quad \Rightarrow \quad \omega = cte$$

2. Momento de Inercia cambia
   a) I aumenta, ω disminuye
   b) I disminuye, ω aumenta



Problema

Determinar el **momento angular** respecto al origen en las situaciones. (a) Un coche de masa 1200 kg se mueve en un círculo de 20 m de radio con velocidad de 15 m/s. El círculo se halla en el plano *xy*, centrado en el origen. Mirado desde un punto situado en la parte positiva del eje *z*, el coche se mueve de sentido antiorario. (b) El mismo coche se mueve con velocidad v=-(15 m/s)**i** a lo largo de la línea $y=y_0=20\ m$ en el plano *xy* paralela al eje *x*. (c) Un disco en el plano *xy* de radio 20 m y masa 1200 kg gira con velocidad angular de 0.75 rad/s alrededor de su eje, que es el eje *z*. Visto desde un punto situado en la parte positiva del eje *z*, el disco se mueve en sentido antiorario.